

Correction des exercices pour la première S ou ES

..... ■ CORRIGE DU CONTROLE ■

II Exercice 1

1. Pour tout réel x , on peut écrire :

$$-2(x-1)^2 + 7 = -2(x^2 - 2x + 1) + 7 = -2x^2 + 4x - 2 + 7 = -2x^2 + 4x + 5.$$

$$\text{Pour tout réel } x, f(x) = -2(x-1)^2 + 7.$$

2. On constate que la fonction f est obtenue en utilisant successivement les fonctions :

$$g : x \mapsto x - 1 ; h : x \mapsto x^2 ; k : x \mapsto -2x + 7$$

Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.

On a $a - 1 < b - 1$ car la fonction affine g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour comparer les carrés de ces deux nombres, il faut connaître leur signe, ce qui conduit à distinguer deux cas.

Premier cas

a et b sont deux réels de l'intervalle $I_1 = [1 ; +\infty[$.

Les deux nombres $a - 1$ et $b - 1$ sont positifs tous les deux et on a :

$(a - 1)^2 < (b - 1)^2$ car la fonction h est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$-2(a - 1)^2 + 7 > -2(b - 1)^2 + 7$, car la fonction affine k est décroissante sur $\mathbb{R}$ (son coefficient directeur -2 est négatif).

Si $1 \leq a < b$, on a montré que $f(a) > f(b)$.

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Deuxième cas

a et b sont deux réels de l'intervalle $I_2 =]-\infty ; 1]$.

Les deux nombres $a - 1$ et $b - 1$ sont négatifs tous les deux et on a :

$(a - 1)^2 > (b - 1)^2$ car la fonction h est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

$-2(a-1)^2 + 7 < -2(b-1)^2 + 7$, car la fonction affine k est décroissante sur $\mathbb{R}$ (son coefficient directeur -2 est négatif).
Si $a < b \leq 1$, on a montré que $f(a) < f(b)$.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

On peut ainsi dresser le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)		7	

3. On choisit des valeurs de x de part et d'autre de 1, valeur pour laquelle la fonction f admet un maximum.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-11	-1	5	7	5	-1	-11

4. Voir graphique en fin d'exercice.

5. a) L'équation $f(x) = -1$ s'écrit $-2(x-1)^2 + 7 = -1$ soit $-2(x-1)^2 = -8$
 $(x-1)^2 = 4$

$$x-1 = 2 \quad \text{ou} \quad x-1 = -2$$

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

L'équation $f(x) = -1$ admet pour solutions : $x = 3$ ou $x = -1$.

Cette équation revient graphiquement à déterminer les abscisses des points de la courbe d'ordonnée $y = -1$, on retrouve les mêmes abscisses 3 et -1.

b) L'inéquation $f(x) \geq 5$ s'écrit $-2x^2 + 4x + 5 \geq 5$ soit $-2x^2 + 4x \geq 0$.

On factorise par $-2x$ et on obtient : $-2x(x-2) \geq 0$.

Pour déterminer le signe d'un produit on dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
signe de $-2x$	+	0	-	-	
signe de $x - 2$	-	-	0	+	
signe de $-2x(x - 2)$	-	0	+	0	-

$$f(x) \geq 5 \quad \text{si} \quad x \in [0 ; 2]$$

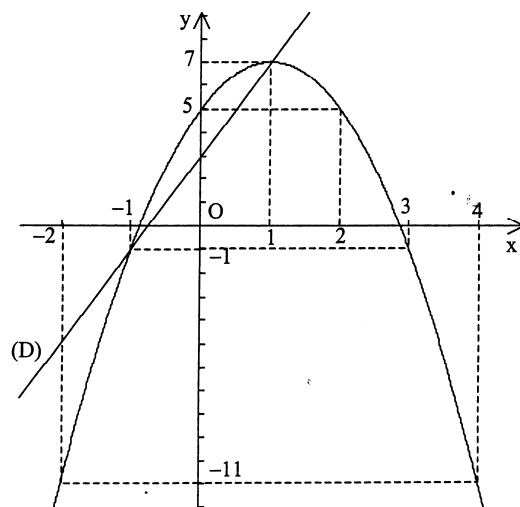
Graphiquement, on détermine les abscisses des points de la courbe dont les ordonnées sont supérieures à 5, on retrouve le même intervalle.

6. a) Pour tracer la droite il suffit de connaître deux points de cette droite : on peut choisir les points de coordonnées (0, 3) et (1, 7).

- b) Résoudre $f(x) = 4x + 3$ revient à résoudre $-2x^2 + 4x + 5 = 4x + 3$ soit
 $-2x^2 = 3 - 5$
 $-2x^2 = -2$
 $x^2 = 1$

L'équation $f(x) = 4x + 3$ admet les solutions $x = 1$ ou $x = -1$.

Graphiquement on détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite (D), on retrouve les valeurs -1 et 1 .



II) Exercice 2

1. Pour tout $x \in I$, $2 + \frac{6}{x-1} = \frac{2(x-1)+6}{x-1} = \frac{2x-2+6}{x-1} = \frac{2x+4}{x-1}$

Pour tout $x \in I$, $\boxed{2 + \frac{6}{x-1} = \frac{2x+4}{x-1} = g(x)}$

2. En utilisant la question précédente, la fonction g est composée dans l'ordre des fonctions suivantes :

$$h : x \mapsto x-1 \quad ; \quad i : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad j : x \mapsto 2+6x$$

Soient a et b deux nombres de l'intervalle $I_1 =]-\infty; 1[$ tels que $a < b$; on a alors $a - 1 < b - 1$ et les deux nombres $a - 1$ et $b - 1$ sont strictement négatifs.

La fonction inverse i est décroissante sur $]-\infty; 0[$, on en déduit :

$$\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$$

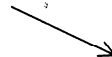
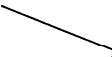
La fonction affine j est croissante sur $\mathbb{R}$ (son coefficient directeur est le réel positif 6) alors :

$$2 + \frac{6}{a-1} > 2 + \frac{6}{b-1}$$

Si $a < b < 1$, on a montré que $f(a) > f(b)$; la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

On prouve de la même manière que la fonction f est également décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

On peut dresser son tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)			

3.

x	-5	-2	-1	0	2	3	4	7
g(x)	1	0	-1	-4	8	5	4	3

4. Voir le graphique en fin d'exercice.

5. L'inéquation $g(x) > 1$ s'écrit :

$$\frac{2x+4}{x-1} > 1 \text{ c'est-à-dire } \frac{2x+4}{x-1} - 1 > 0$$

On ne peut pas multiplier les deux membres par $x - 1$ puisque l'on ne connaît pas son signe.

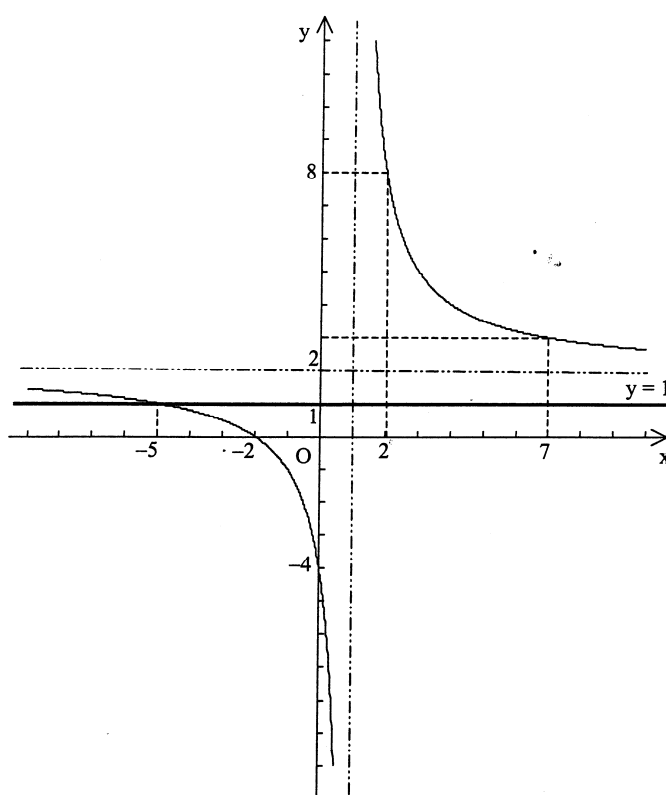
$$\frac{2x+4-x+1}{x-1} > 0 \text{ soit } \frac{x+5}{x-1} > 0$$

Pour déterminer le signe d'un quotient on dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
signe de $x + 5$	-	0	+	+
signe de $x - 1$	-	-	0	+
signe du quotient	+	0	-	+

$g(x) > 1$ se traduit par un signe strictement positif du quotient soit :
 $g(x) > 1$ si $x \in]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$

Graphiquement, on détermine les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 1. On retrouve sur la figure ci-dessous les deux intervalles précédents.



..... ■ CORRIGE DU CONTROLE ■

III Exercice 3

1. On utilise le graphique ainsi que le tableau de valeurs proposés :
Les images des nombres donnés sont les ordonnées des points de la courbe
dont les abscisses sont ces nombres :

L'image de -2 est 16 . L'image de 0 est 0 .

L'image de 2 est 0 . L'image de 4 est 16 .

2. Les antécédents de nombres réels sont les abscisses des points de la
courbe dont les ordonnées sont les nombres proposés :

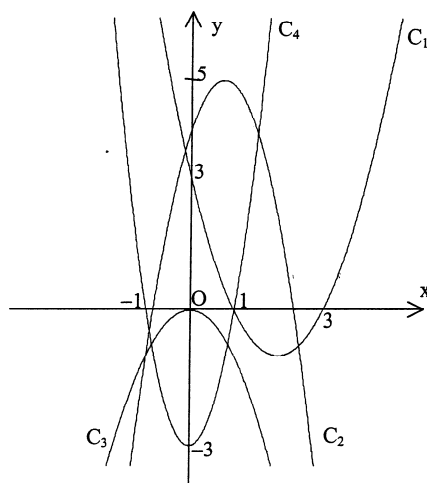
Les antécédents de -9 sont -1 et 3 .

Les antécédents de 7 sont $-1,83$; 1 et $3,83$.

On a déterminé à la question 3 les solutions de l'équation $g(x) = 0$ c'est-à-dire
les abscisses des points d'intersection de la courbe correspondante avec l'axe
des abscisses soit $x = -1$ ou $x = 1$, seule la courbe C_4 répond à ces condi-
tions.

Sur la figure on remarque également que le point de coordonnées $(1, 0)$
appartient aux deux courbes C_1 et C_4 .

C_1 est la courbe représentative de la fonction f .
 C_4 est la courbe représentative de la fonction g .



3. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

$f(x) = 0$ admet quatre solutions $-1,64$; 0 ; 2 ; $3,64$.

Résoudre graphiquement la double inéquation $-9 < f(x) \leq 0$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe dont les ordonnées sont comprises entre -9 et 0 , le nombre -9 étant exclu.

On trouve l'union des intervalles suivants :

$$x \in [-1,64 ; -1[\cup]-1 ; 0] \cup [2 ; 3[\cup]3 ; 3,64].$$

4. La lecture du graphique permet de dresser le tableau de variation suivant :

x	-2	-1	1	3	4
f(x)	16		7		16

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -9 -9

IV) Exercice 4

1. Développons l'expression de $f(x) = (x-1)(x-3)$:

$$f(x) = x^2 - x - 3x + 3$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$g(x)$ est une différence de deux carrés :

$$g(x) = [(2x+1) + (x+2)][(2x+1) - (x+2)]$$

$$g(x) = [2x+1+x+2][2x+1-x-2] = (3x+3)(x-1)$$

$$g(x) = 3(x+1)(x-1)$$

2. On remplace x par 3 dans la forme factorisée donnée au départ pour $f(x)$:

$$f(3) = (3-1)(3-3) = 2 \times 0 = 0.$$

On peut utiliser la forme développée de $f(x)$ pour le second calcul :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = \frac{1+8+12}{4} = \frac{21}{4}$$

$$g(-3) = 3(-3+1)(-3-1) = 3(-2)(-4) = 24$$

$$f(3) = 0 ; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4} ; g(-3) = 24$$

3. En utilisant la forme développée de $f(x)$, la première équation s'écrit :

$$x^2 - 4x + 3 = 3$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0.$$

Un produit de facteurs s'annule si et seulement si l'un au moins des facteurs s'annule : $x = 0$ ou $x = 4$, on remarque que ces deux solutions appartiennent à l'ensemble I.

$f(x) = 3$ admet, dans I, les solutions $x = 0$ ou $x = 4$.

Pour la seconde équation, on choisit la forme factorisée de $g(x)$:

$3(x+1)(x-1) = 0$ soit $x+1 = 0$ ou $x-1 = 0$: $x = -1$ ou $x = 1$, ces deux solutions appartiennent à I.

$g(x) = 0$ admet, dans I, les solutions $x = -1$ ou $x = 1$.

On remarque que les formes factorisées de $f(x)$ et $g(x)$ comportent le même facteur $(x-1)$, on utilise donc ces formes pour la troisième équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-1)(x-3) = 3(x-1)(x+1)$$

$$(x-1)(x-3) - 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)[(x-3) - 3(x+1)] = 0$$

$$(x-1)[x-3-3x-3] = 0$$

$$(x-1)(-2x-6) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ ou } -2x-6 = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } -2x = 6$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Ces solutions appartiennent à I :

$f(x) = g(x)$ admet, dans I, les solutions $x = 1$ ou $x = -3$.

4. Pour déterminer le signe d'un produit de facteurs on va dresser un tableau de signes.

$f(x) = (x-1)(x-3)$ s'annule pour $x = 1$ ou $x = 3$.

x	-5	1	3	5
signe de $x-1$	-	0	+	+
signe de $x-3$	-	-	0	+
signe de $(x-1)(x-3)$	+	0	-	0

Le signe demandé est positif ou nul :

Dans I, $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-5 ; 1] \cup [3 ; 5]$.

5. A l'aide de la figure ci-dessous, on remarque que la courbe C_1 coupe l'axe des abscisses pour $x = 3$, résultat trouvé à la question 2 en calculant $f(3) = 0$. On a de même trouvé que $f(0) = 3$ à la question 3, ce qui signifie que la courbe correspondante doit couper l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 3)$. La courbe C_1 est la seule courbe vérifiant ce résultat.